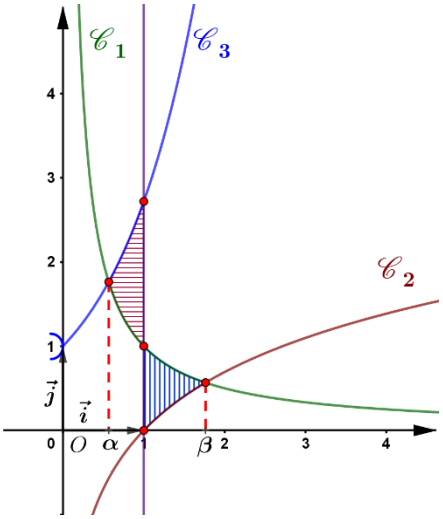
EXERCICE N°1 : | **50'** | **7 points**

Dans le graphique ci-contre, on a représenté les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.



- La courbe $\mathscr{C}_1$ représente la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $x \mapsto \frac{1}{x}$.
- La courbe $\mathscr{C}_2$ représente la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $x \mapsto \ln x$.
- La courbe $\mathscr{C}_3$ représente la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $x \mapsto e^x$.

1°) a) Déterminer graphiquement le signe de $\left(\ln x - \frac{1}{x}\right)$ sur $]0,+\infty[$.

b) Déterminer graphiquement le signe de $\left(e^x - \frac{1}{x}\right)$ sur $]0,+\infty[$.

2°) a) Calculer en fonction de α, l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan hachurée en rayure horizontale.

b) Vérifier que $\mathscr{A} = \mathrm{e} + \ln\alpha - \frac{1}{\alpha}$.

3°) a) Calculer en fonction de β, l'aire $\mathscr{A}'$ de la partie du plan hachurée en rayure verticale.

b) Montrer que $\mathscr{A}' = \frac{(\beta-1)^2}{\beta}$.

4°) On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = e^x - \ln x$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère $(0,\vec{i},\vec{j})$.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$; interpréter graphiquement le résultat.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$; interpréter graphiquement le résultat.

5°) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Etudier la position de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}_3$.

c) Expliquer comment utiliser les courbes $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ pour tracer la tangente horizontale de $\mathscr{C}$.

d) Tracer $\mathscr{C}$ dans le même repère $(0,\vec{i},\vec{j})$.

6°) Hachurer (en rayure oblique) en justifiant le domaine $\mathscr{D}$ du plan limitée par les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_3$; et ; les droites d'équations : $x = \lambda$ *et* $x = \alpha$ tel que $0 < \lambda < \alpha$ et l'aire du $\mathscr{D}$ est égale à $\mathscr{A}$.

EXERCICE N°2 :	60'	7 points	

I– Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$ et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (**unité : 2cm**).

1°) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement les résultats.

b) Montrer que pour tout réel x on a : $f'(x)=\dfrac{2e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}$.

Dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que le point $I\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de $\mathscr{C}$.

d) Donner une équation cartésienne de la tangente (T) à $\mathscr{C}$ au point I.

2°) a) Montrer que pour tout réel t on a : $f'(t)\le\dfrac{1}{2}$.

b) En intégrant les deux membres de l'inégalité précédente, montrer que pour $x\ge 0$ on a :

$f(x)\le\dfrac{1}{2}(x+1)$

c) Déterminer alors la position de $\mathscr{C}$ par rapport à (T).

3°) Tracer (T) et $\mathscr{C}$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

4°) a) Montrer que f est une bijection de IR sur $]0,1[$.

b) Soit $y\in]0,1[$. Déterminer le réel x tel que $f(x)=y$.

c) En déduire la représentation graphique dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ de la fonction g définie sur $]0,1[$ par : $g(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$

II– On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel non nul n par : $I_n=\int_{-1}^{0}\dfrac{e^{2nt}}{1+e^{2t}}dt$.

1°) a) Montrer que (I_n) est décroissante et positive.

b) En déduire que (I_n) est convergente.

2°) Montrer que pour tout naturel non nul n, on a : $I_n\le\dfrac{1}{2n}$.

3°) Trouver la limite de I_n quand n tend vers l'infini.